



TITLE:

# Jacobi forms に付随するL-函数について(Automorphic representation の研究)

AUTHOR(S):

村瀬, 篤

---

CITATION:

村瀬, 篤. Jacobi forms に付随するL-函数について(Automorphic representation の研究). 数理解析研究所講究録 1986, 583: 140-160

ISSUE DATE:

1986-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99335>

RIGHT:

# Jacobi forms に付随する L-函数について

東大理 村瀬 篤

講演では, Jacobi form に付随する L-函数 (のーつ) を定義し, その解析的性質について述べた。本稿では講演で詳しく触れなかった L-函数の Piatetski-Shapiro & Rallis 型の積分表示 ([PS-R]) を中心に扱う。local factor の具体的な計算については, 現在準備中の論文を参照していただきたい。

## §1. Jacobi forms

Jacobi form を扱うには, T. Shintani ([Sh]) により導入された次のような  $\mathbb{Q}$  上の代数群  $\underline{G}$  のアデール群  $\underline{G}_A$  上の保型形式ととらえるのが便利である。整数  $n \geq 1$ ,  $m \geq 0$  に対し  $\mathbb{Q}$  上の代数群  $H = H_{n,m}$  を

$$H = M(m, n) \times M(m, n) \times Z_m$$

(ただし,  $M(m, n)$  および  $Z_m$  は, それぞれ  $m \times n$  次行列 および  $m$  次対称行列のなす  $\mathbb{Q}$  上の代数群), 乗法演算を,

$$(\xi, \eta, z)(\xi', \eta', z') = (\xi + \xi', \eta + \eta', z + z' + \xi^t \eta' + \eta^t \xi')$$

により定めるものとする。  $H$  は, two step nilpotent 非代  
数群で, "Heisenberg group" と呼ばれる。  $H$  には,  $n$  次

の symplectic 群  $G = G_n = \{g \in GL(2n) \mid {}^t g J_n g = J_n\}$   
( $J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ ) が次のように作用する;  $h = (\xi, \eta, z) \in H$ ,  
 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$  に対し,

$$h^g = (\xi', \eta', z + \xi^t \eta' - \xi^t \eta)$$

ただし,  $(\xi', \eta') = (\xi, \eta)g = (\xi a + \eta c, \xi b + \eta d)$ .

ここで,  $\underline{G} = \underline{G}_{n,m} \subseteq H_{n,m} \times G_n$  との半直積

$$\underline{G}_{n,m} = H_{n,m} \ltimes G_n$$

により定義する。  $\underline{G}$  は  $\mathbb{Q}$  上定義された連結非代数群であ

る。  $\underline{G}$  の中心は,  $\mathbb{Z} = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{Z}_m\}$  だから,

$m \geq 1$  ならば,  $\underline{G}$  は reductive ではない。  $\underline{G}$  は,

$$(\xi, \eta, z) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \left[ \begin{array}{c|c} 1_{m+m} & \begin{smallmatrix} \xi & \eta \\ \eta^t & 0 \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & 1_{m+m} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} 1_m & \begin{smallmatrix} \xi \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} I_m & 0 \\ -\xi^t & 1_n \end{smallmatrix} \end{array} \right]$$

$$\times \left[ \begin{array}{c|c} 1_m & 0 \\ \hline a & b \\ \hline 0 & 1_m \\ \hline c & d \end{array} \right]$$

により  $Sp(m+m)$  の部分群とみさせる。 Lie 群  $\underline{G}(\mathbb{R})$

のユ=タリ表現 (特に discrete series) については, I. Satake  
の研究 ([Sa]) がある。

complex domain  $\mathcal{H}_n \times M_{mn}(\mathbb{C}) \ni \mathcal{D} = \mathcal{D}_{R,m}$  とかく。  $\mathcal{H}_n = \{ z \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t z = z, \operatorname{Im} z > 0 \}$  は  $n$ -次 Siegel 上半空間である。 Lie 群  $\underline{G}(\mathbb{R})$  は、 $\mathcal{D}$  に次のように解析的かつ推移的に作用する：

$$\begin{aligned} \underline{g} \langle \Sigma \rangle &= (g \langle z \rangle, w j(g, z)^{-1} + \xi \cdot g \langle z \rangle + \eta) \\ \text{すなわち } \underline{g} &= (\xi \eta \xi) g \in \underline{G}(\mathbb{R}), \Sigma = (z, w) \in \mathcal{D} \quad z \in \mathcal{H}_n \\ g \langle z \rangle &= (az+b)(cz+d)^{-1}, j(g, z) = cz+d \quad (g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(\mathbb{R}), \\ & z \in \mathcal{H}_n). \quad G(\mathbb{R}) \text{ における } i1_n \in \mathcal{H}_n \text{ の固定部分群を} \\ K_\infty = K_{n,\infty} \text{ とかく: } K_\infty &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in G(\mathbb{R}) \mid \alpha + i\beta \in U(n) \right\}. \\ \Sigma_0 = (i1_n, 0) \in \mathcal{D} \text{ の } \underline{G}(\mathbb{R}) \text{ における固定部分群は} \\ \underline{Z}(\mathbb{R}) \cdot K_\infty \text{ に等しい. 従って, } \underline{g} \mapsto \underline{g} \langle \Sigma_0 \rangle \text{ は,} \\ \underline{G}(\mathbb{R}) / \underline{Z}(\mathbb{R}) \cdot K_\infty \text{ から } \mathcal{D} \text{ の上への diffeomorphism} \\ \text{を与える.}\end{aligned}$$

次に、整数  $l$  と  $m$ -次半整数正定値対称行列  $S$  に対し、保型因子  $J_{S,l}$  を定義する。  $u, v \in M(m, n)$  に対し、  $S(u, v) = {}^t u S v$ ,  $S[u] = {}^t u S u$  と略記する。  
  $\underline{g} = (\xi \eta \xi) g \in \underline{G}(\mathbb{R})$  ( $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ),  $\Sigma = (z, w) \in \mathcal{D}$  に対し、

$$\begin{aligned} J_{S,l}(\underline{g}, \Sigma) &= \det j(g, z)^l e \left[ -{}^t S \xi \right. \\ &\quad \left. + {}^t S[w] j(g, z)^{-1} c - 2{}^t S(\xi, w) j(g, z)^{-1} \right. \\ &\quad \left. - {}^t S[\xi] g \langle z \rangle \right] \end{aligned}$$

とかく。  $\equiv \equiv \equiv \quad \varphi(x) = e^{2\pi i x} \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (\underline{g}, \underline{Z})$   
 $\longmapsto J_{s,l}(\underline{g}, \underline{Z})$  は  $\underline{G}(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}$  上の保型因子  
 を定める。

最後に,  $\equiv$  の保型因子を用いて weight  $l$ ,  
 index  $S$  の holomorphic cusp forms の空間  
 $\mathcal{G}_{s,l}$  を定義する。  $\mathbb{Q}$  の  $T$ -デリ環を  $A$  とかく。

$A/\mathbb{Q}$  の non trivial character  $\chi_A$  を  $\chi_A(x_\infty) =$   
 $\varphi(x_\infty)$  ( $x_\infty \in \mathbb{R}$ ) なるものを用いる。  $Z(A)$  の character  
 $\chi_S$  を  $\chi_S(\gamma) = \chi_A(\pi_S \gamma)$  により定義する。

さらに  $\mathbb{K}_f = \prod_{p < \infty} \mathbb{K}_p$  ( $\mathbb{K}_p = \underline{G}_{\mathbb{Z}_p}$ )  
 とかく。 正整数  $l$  に対し,  $\mathcal{G}_{s,l}$  を次の条件  
 (1.1) — (1.4) をみたす  $\underline{G}_A$  上の  $\mathbb{C}$ -valued function  
 $f$  のなす  $\mathbb{C}$ -vector space とする。

$$(1.1) \quad f(\pi(\gamma)) \equiv \underline{g} \underline{k} k_\infty \\
= \chi_S(\gamma) \det j(k_\infty, i1_n)^{-l} f(\underline{g}) \\
(\gamma \in Z_A, \underline{g} \in \underline{G}_{\mathbb{Q}}, \underline{k} \in \mathbb{K}_f, k_\infty \in K_\infty)$$

$Z \in \mathcal{D}$  に対し,  $\underline{g}_Z \langle Z_0 \rangle = Z$  なる  $\underline{G}_{\mathbb{R}}$  の元  $\underline{g}_Z$   
 を選べ,  $F_f(Z) = f(\underline{g}_Z) J_{s,l}(\underline{g}_Z, Z_0)$  とかく。  
 条件 (1.1) により  $F_f(Z)$  は  $\underline{g}_Z$  のとり方によらず  $Z$   
 への函数となる。

$$(1.2) \quad Z \longmapsto F_f(Z) \text{ は } \mathcal{D} \text{ 上正則。}$$

(1.3)  $f$  は  $\underline{G}_A$  上有界。

最後の条件を述べるために、いくつか記号を導入する必要がある。 整数  $d$  ( $1 \leq d \leq n$ ) に対し、

$$P(d) = \left\{ \begin{bmatrix} A & * & * & * \\ 0 & \alpha & * & \beta \\ 0 & 0 & {}^t A^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma & * & \delta \end{bmatrix} \in G_n \mid \begin{array}{l} A \in GL(d) \\ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sp(n-d) \end{array} \right\}$$

$$N(d) = \left\{ \begin{bmatrix} 1_d & * & * & * \\ 0 & 1_{n-d} & * & 0 \\ 0 & 0 & 1_d & 0 \\ 0 & 0 & * & 1_{n-d} \end{bmatrix} \in G_n \right\}$$

とおく。  $\{P(d) : 1 \leq d \leq n\}$  は  $G_n$  の maximal parabolic subgroups の共役類の代表系をなす。

$N(d)$  は  $P(d)$  の unipotent radical である。 さらに

$$H(d) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \eta & 0 \end{pmatrix} \in H \mid \eta = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

とおく。 最後の条件 (cuspidal condition) は次の通り。

$$(1.4) \quad \int_{\frac{N(d)_A}{N(d)_\infty}} f(\underline{u} \underline{g}) d\underline{u} = 0 \quad \text{for } \forall \underline{g} \in \underline{G}_A \quad \forall d$$

$$T = T' \cup \dots, \quad \underline{N}(d) = H(d) \cdot N(d).$$

$G_{S, \ell}$  の各元  $f$  を weight  $\ell$ , index  $S$  の 正則 Jacobi cusp form と呼ぶ。  $G_{S, \ell}$  は  $\mathbb{C}$  上有限次元であることが知られている。

## §2. Hecke 作用素, L-函数 ([Sh])

$p \nmid \det(2S)$  なる素数  $p$  に対し fix  $L$ ,  $\underline{G}_p = \underline{G}_{\mathbb{Q}_p}$ ,  $\underline{K}_p = \underline{G}_{\mathbb{Z}_p}$  etc. と略記する.  $\psi_{S,p} \in \psi_S$  の local component とする.  $\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_p(\underline{G}_p, \underline{K}_p; \psi_{S,p}) \in$ , 次の条件 (2.1), (2.2) をみたす  $\underline{G}_p$  上の  $\mathbb{C}$ -valued functions のなる  $\mathbb{C}$ -module とする.

$$(2.1) \quad \varphi((\alpha \alpha') \underline{x} \underline{x}') = \psi_{S,p}(\alpha) \varphi(\underline{x})$$

$$(\alpha \in \mathbb{Z}_p, \underline{x}, \underline{x}' \in \underline{K}_p)$$

$$(2.2) \quad \varphi \text{ は modulo } \underline{\mathbb{Z}}_p \text{ で compact な support をもつ.}$$

$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_p$  に対し  $L$  convolution

$$\varphi_1 * \varphi_2(\underline{x}) = \int_{\underline{\mathbb{Z}}_p \backslash \underline{G}_p} \varphi_1(\underline{x} \underline{z}^{-1}) \varphi_2(\underline{z}) d\underline{z}$$

により積を定めることにより,  $\mathcal{H}$  は  $\mathbb{C}$ -algebra となる.

$$\underline{N} = \left\{ (\alpha \eta_0) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X \\ & 1 \end{pmatrix} \mid A = \begin{pmatrix} * & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(n), \right.$$

$$\left. X \in \mathbb{Z}_n \right\},$$

$$\underline{I} = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & t_n & \\ & & & t_1^{-1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & t_n^{-1} \end{pmatrix} \right\}$$

とあり,  $d\underline{x} \in \underline{N}_p$  の Haar measure なる

$$\int_{\underline{N}_{\mathbb{Z}_p}} d\underline{n} = 1$$

なることを示す。さらに  $t \in T_p$  に対し,

$$\delta_{\underline{N}}(t) = d(t\underline{n}t^{-1})/d\underline{n}$$

により  $\underline{N}$  の module  $\delta_{\underline{N}}$  が定義される。  $\varphi \in \mathcal{H}_p$ ,

$t \in T_p$  に対し

$$\widehat{\varphi}(t) = \delta_{\underline{N}}^{-\frac{1}{2}}(t) \int_{\underline{N}} \varphi(\underline{n}t) d\underline{n}$$

とかくと,  $\widehat{\varphi}$  は  $T_p$  上 compactly supported である。

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$  に対し

$$\pi\lambda = \begin{pmatrix} p^{\lambda_1} & & & \\ & p^{\lambda_2} & & \\ & & p^{\lambda_3} & \\ & & & p^{\lambda_n} \end{pmatrix} \in T_p$$

とかく。  $\varphi \in \mathcal{H}$  に対し

$$F_{\varphi}(x) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \widehat{\varphi}(\pi\lambda) x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$$

とかくと,  $F_{\varphi} \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$  である。

$1 \leq i < j \leq n$ ,  $1 \leq k \leq n$  に対し,  $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$  の  
自己同型  $\sigma_{ij}, \tau_k$  は

$$\sigma_{ij}(X_l) = \begin{cases} X_j & l=i \\ X_i & l=j \\ X_l & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\tau_k(X_l) = \begin{cases} X_k^{-1} & l=k \\ X_l & \text{otherwise} \end{cases}$$

により定め,  $\sigma_{ij}, \tau_k$  たちで生成される  $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$



の自己同型群  $\Sigma$ ,  $W$  とかく。 とき  $F_\varphi$  は,  $W$ -不変  
(i.e.  $F_\varphi \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]^W$ ) である。

Proposition 1 (Satake 同型) 写像  $\varphi \mapsto F_\varphi$   
は,  $\mathcal{X}$  から  $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]^W$  への,  $\mathbb{C}$ -algebra としての同型を与える。

$\chi \in \text{Hom}(T_p/T_p^\circ, \mathbb{C}^\times)$  ( $T_p^\circ = T_{\mathbb{Z}_p}$ ) に対して,  
 $\mathbb{G}_p$  上の函数  $\phi_\chi$  を  

$$\phi_\chi((\alpha \beta \gamma) \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) =$$

$$\chi_{S,p}(\beta) \chi \cdot \partial_N^{\frac{1}{2}}(t) \cdot \Phi(\xi)$$

$$(\beta \in \mathbb{Z}_p, \alpha \in \mathbb{N}_p, t \in T_p, \xi \in M_{nn}(\mathbb{Q}_p), \gamma \in \mathbb{K}_p)$$
により定める。 ただし  $\Phi$  は  $M_{nn}(\mathbb{Z}_p)$  の特性函数。

$\mathbb{G}_p$  の "帯球函数"  $\omega_\chi$  を,

$$\omega_\chi(\underline{g}) = \int_{\mathbb{K}_p} \phi_\chi(\underline{k} \underline{g}) d\underline{k} \quad (\underline{g} \in \mathbb{G}_p)$$

により定義する。 とき  $\mathbb{K}_p$  の Haar measure  $d\underline{k}$  は  
 $\int_{\mathbb{K}_p} d\underline{k} = 1$  により正規化する。 とき, 次が  
成立する。

Proposition 2

$$(i) \quad \omega_X((003) \underline{k} \underline{g} \underline{k}') = \psi_{S,p}(3) \omega_X(\underline{g})$$

$$3 \in \mathbb{Z}_p, \underline{k}, \underline{k}' \in \mathbb{K}_p, \underline{g} \in \mathbb{G}_p$$

$$(ii) \quad \omega_X(1) = 1$$

$$(iii) \quad \varphi \in \mathcal{A} \text{ に対し,}$$

$$\varphi * \omega_X = \hat{\omega}_X(\varphi) \cdot \omega_X$$

$$\text{ただし, } \hat{\omega}_X(\varphi) = F_\varphi(x_1^{-1}(p), \dots, x_n^{-1}(p))$$

$$\left( = \text{すなわち } \chi \left( \begin{smallmatrix} t_1 & & & \\ & t_n & & \\ & & t_1^{-1} & \\ & & & t_n^{-1} \end{smallmatrix} \right) = \chi_1(t_1) \cdots \chi_n(t_n) \text{ である} \right)$$

Proposition 3

$\varphi \mapsto \hat{\omega}_X(\varphi)$  は,  $\mathcal{A}$  から  $\mathbb{C}$  への  $\mathbb{C}$ -algebra homomorphism を与える。逆に  $\mathcal{A}$  から  $\mathbb{C}$  への任意の  $\mathbb{C}$ -algebra homomorphism は,  $\hat{\omega}_X(\chi$  ( $\chi \in \text{Hom}(\mathbb{T}_p/\mathbb{T}_p^\circ, \mathbb{C}^\times)$ )) の形にかける。

$\mathcal{A}_p$  は convolution により,  $G_{S,E}$  に作用する。この作用は,  $G_{S,E}$  の自然な計量に関し正規であり, また, Proposition 1 により  $\mathcal{A}_p$  は可換だから,  $G_{S,E}$  の基底として,  $\bigotimes_{p \nmid \det(2S)} \mathcal{A}_p$  の同時固有函数からなるものがとれる。  $f \in G_{S,E}$  が  $\mathcal{A}_p(p \nmid \det(2S))$  の同時固有函数であるとする:

$$f * \varphi = \lambda_{f,p}(\varphi) \cdot f \quad (\varphi \in \mathcal{A}_p, \lambda_{f,p}(\varphi) \in \mathbb{C}).$$

$\varphi \mapsto \lambda_{f,p}(\varphi)$  は,  $\mathcal{A}$  から  $\mathbb{C}$  への  $\mathbb{C}$ -algebra homomorphism である Proposition 3 より,

$$\lambda_{f,p}(\varphi) = \widehat{\omega}_{\chi_{f,p}}(\varphi) \quad \varphi \in \mathcal{A}_p$$

なる  $\chi_{f,p} \in \text{Hom}(T_p/T_p^0, \mathbb{C}^\times)$  が存在する.  $\chi_{f,p}$  に対応する  $\mathbb{Q}_p^\times$  の character を  $\chi_{f,p}^{(i)}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) とし,

$$L_p(s, f) = \prod_{i=1}^n (1 - \chi_{f,p}^{(i)}(p) p^{-s})^{-1} (1 - \chi_{f,p}^{(i)}(p)^{-1} p^{-s})^{-1}$$

とかく.

$$L(s, f) = \prod_{p \nmid \text{ord}(2s)} L_p(s, f)$$

が, 我々の考察の対象とする  $f$  の  $L$ -函数である.

### §3. Orbit decomposition

$W = \mathbb{Q}^{4n+2m}$  (横ベクトルの空間と考える) 上の行列

$$J_W = \left[ \begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 0 & 2n \\ J_n & 0 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 1_m & 2n \\ 0 & -J_n \end{smallmatrix} \\ \hline \begin{smallmatrix} -1_m & 0 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 0 & -J_n \end{smallmatrix} \end{array} \right] \quad \text{により定まる非退化歪対称}$$

形式  $\langle, \rangle_W$  に関する symplectic 群  $G^*$  とする:

$$G^* = \left\{ g^* \in GL(4n+2m) \mid \langle Wg^*, W'g^* \rangle_W = \langle W, W' \rangle_W \right. \\ \left. \forall W, W' \in W \right\}.$$

又  $\mathcal{E}$ ,  $\langle, \rangle_W$  に関する  $W$  の maximal isotropic  $\mathbb{Q}$ -subspace のなす集合とする.  $G_{\mathbb{Q}}^*$  は,  $\mathcal{E}$  に (右から) 推移的に作用する.  $e_i = (0 \cdots 0 \overset{i}{1} 0 \cdots 0)$  ( $1 \leq i \leq 4n+2m$ )  $\in W$  の basis

とする。  $L_0 \in \mathfrak{e}$ ,  $e_i (1 \leq i \leq m)$ ,  $e_i + e_{i+m} (m+1 \leq i \leq m+2n)$  で張られる  $W$  の部分空間とすると,  $L_0 \in \mathfrak{k}$ .  $L_0$  の  $G_Q^*$  における固定部分群を  $P_Q^*$  とすると,  $P^*$  は  $G^*$  の maximal parabolic subgroup で, その Levi subgroup は  $GL(2n+m)$  と同型であり,  $\mathfrak{k}$  と  $P_Q^* \backslash G_Q^*$  は  $G_Q^*$  の作用する均質空間として同一視される.

$$\underline{g} = (\tilde{z} \eta z) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \underline{g}' = (\tilde{z}' \eta' z') \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \underline{G}$$

に対し,

$$2(\underline{g} \times \underline{g}') = \left[ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} m & n & n & m & n & n \\ 1_m & \tilde{z} & \eta & \tilde{z} & \tilde{z}' & \eta' \\ 0 & 1_n & 0 & {}^t \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_n & -{}^t \tilde{z} & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} m & n & n & m & n & n \\ 1_m & & & & & \\ a & b & & & & 0 \\ c & d & & & & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & & & 1_m & 0 & 0 \\ & & & {}^t \eta & 1_n & 0 \\ & & & {}^t \tilde{z}' & 0 & 1_n \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & & & 1_m & & \\ & & & a' & b' & \\ & & & c' & d' & \end{matrix} \end{array} \right]$$

$$(\tilde{z} = z - z' - \eta {}^t \tilde{z} + \eta {}^t \tilde{z}')$$

とみると,  $2$  は  $\underline{G} \times \underline{G}$  から  $G^*$  への準同型写像を定める. 明らかに,  $\text{Ker } 2 = \underline{Z}^d = \{(00z) \times (00z) \mid z \in Z_m\}$ .  $m=0$  のときは,  $2$  は [PS-R] で与えられている  $Sp(m) \times Sp(m)$  から  $Sp(2n)$  への embedding に一致している.  $\underline{G}_Q \times \underline{G}_Q$  は,  $2$  を通じて  $\mathfrak{k}$  に作用する.

この節の目標は,  $\mathfrak{k}$  の  $\underline{G}_Q \times \underline{G}_Q$ -orbit decomposition を求め, 各 orbit の代表  $L$  に対し,

$\underline{G}_a \times \underline{G}_a$  における 固定部分群

$$\underline{P}(L)_a = \left\{ \underline{g} \times \underline{g}' \in \underline{G}_a \times \underline{G}_a \mid L \cdot \underline{z}(\underline{g} \times \underline{g}') = L \right\}$$

の構造を調べる ことである。  $L, L' \in \mathcal{L}$  に対し、  
 $L, L'$  が 同じ  $\underline{G}_a \times \underline{G}_a$ -orbit に属するとき  $L \sim L'$   
 とかく。

$$W_1 = \sum_{i=1}^m \mathbb{Q} \cdot e_{m+2n+i}$$

$$W_2 = \sum_{i=1}^{m+2n} \mathbb{Q} \cdot e_{m+2n+i}$$

とおく。  $L \in \mathcal{L}$  に対し 二つの "不変量" を次のように  
 定義する。

$$K_1(L) = L \cap W_1$$

$$K_2(L) = \dim(L \cap W_2) - \dim(L \cap W_1),$$

ただし  $L, W_1$  と  $\mathbb{Q}^m$  を自然に同一視し、  $K_1(L) \in \mathbb{Q}^m$   
 の  $\mathbb{Q}$ -subspace のなす集合  $\mathcal{P}(\mathbb{Q}^m)$  の元とみる。 実際、  
 $0 \leq K_2(L) \leq n$  であることがわかる。

$$\text{明らかに } K_1(L_0) = \{0\}, \quad K_2(L) = 0.$$

このとき、次のことが証明される。

Proposition 4  $L, L' \in \mathcal{L}$  に対し

$$L \sim L' \iff K_i(L) = K_i(L') \quad i=1, 2.$$

$\mathbb{Q}^m$  の subspace  $U \in \mathcal{E}$ ,  $W_1$  の subspace とみなし,  $U' \in \mathcal{E}$ ,  $\langle, \rangle_W$  に関する  $U$  の直交補空間,  $U^\perp = U' \cap \sum_{i=1}^m \mathbb{Q} e_i$  とおく. 整数  $d$  ( $0 \leq d \leq n$ ) と,  $U \in \mathcal{F}(\mathbb{Q}^m)$  に対し,  $U, U^\perp, e_{m+n+i}, e_{2m+3n+i}$  ( $1 \leq i \leq d$ ) とともに  $e_{m+j} + e_{2m+2n+j}, e_{m+n+j} + e_{2m+3n+j}$  ( $d+1 \leq j \leq n$ ) で張られる  $W$  の subspace  $\in L_{U,d}$  とおく.  $\mathcal{E}$  として  $L_{U,d} \in \mathcal{E}$  として,  $K_1(L_{U,d}) = U$ ,  $K_2(L_{U,d}) = d$ .

Cor  $\mathcal{E}$  の  $\underline{G}_{\mathbb{Q}} \times \underline{G}_{\mathbb{Q}}$ -orbit decomposition の代表系として  $\{L_{U,d} \mid U \in \mathcal{F}(\mathbb{Q}^m), 0 \leq d \leq n\}$  をとることはできる.

次の節で必要になる  $\underline{P}(L)$  の構造を調べよう. Cor. より  $L = L_{U,d}$  の場合だけ調べれば十分である.

Lemma 1  $\underline{P}(L_{\{0\},0}) = \underline{G}^d = \{g \times g \mid g \in \underline{G}\}$

Lemma 2  $\underline{P}(L_{\{0\},d}) = \mathcal{H}(d) \underline{P}(d) \quad d \geq 1$   
ただし,

$$\mathcal{H}(d) = \{ (\xi \eta \xi) \times (\xi' \eta' \xi') \in H \times H \mid$$

$$\xi = \xi', \quad \xi_i = \eta'_i = 0 \quad (1 \leq i \leq d),$$

$$\xi_j = \xi'_j, \quad \eta_j = \eta'_j \quad (d+1 \leq j \leq n) \}$$

( $\xi_i, \dots$  は  $\xi, \dots$  の第  $i$  行)

$$P(d) = \left\{ \begin{pmatrix} \overset{d}{A} & \overset{n-d}{*} & \overset{d}{*} & \overset{n-d}{*} \\ 0 & \alpha & * & \beta \\ 0 & 0 & {}^t A^{-1} & 0 \\ 0 & \delta & * & \delta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \overset{d}{A'} & \overset{n-d}{0} & \overset{d}{0} & \overset{n-d}{0} \\ * & \alpha & * & \beta \\ * & * & {}^t A'^{-1} & * \\ * & \delta & 0 & \delta \end{pmatrix} \mid \right.$$

$$\left. A, A' \in GL(d), \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \delta \end{pmatrix} \in Sp(n-d) \right\}$$

特に,  $\underline{P}(L_{\{0\}, d})$  は

$$\underline{N}(\{0\}, d) = \mathcal{H}(d) \cdot (N(d) \times {}^t N(d))$$

を normal subgroup とし得る。

一般に  $U \neq \{0\}$  のときは  $\underline{P}(L_{U, d})$  の構造は複雑であるが, 我々の目的のためには次で十分である。  
 $\mathbb{Q}^m$  の subspace  $U$  に対し,  $\hat{U} = \{x \in \mathbb{Q}^m \mid x^t U = 0\}$   
 $Z(U) = \{z \in Z_m \mid \hat{U} \cdot z \subset U\}$  とおく。

Lemma 3  $\underline{P}(L_{U, d})$  は  $U \neq \{0\}$  のとき,

$$\underline{N}(U, d) = \{(00z) \times 1 \mid z \in Z(U)\}$$

を normal subgroup とし得る。

## §4. Basic identity

$N^* \in P^*$  の unipotent radical とする。

$p^* \in P_A^*$ ,  $s \in \mathbb{C}$  に対し

$$\delta_{P^*}^s(p^*) = [d(p^* n^* p^{*-1}) / dn^*]^s$$

( $dn^*$  は  $N_A^*$  の Haar measure) とする。  $\varphi \in G_A^*$

上の  $\mathbb{C}$ -valued function として  $\varphi(p^* g^*) = \delta_{P^*}^s(p^*)$

・  $\varphi(g^*)$  ( $p^* \in P_A^*$ ,  $g^* \in G_A^*$ ) をみたすものとする。

$\operatorname{Re} s \gg 0$  として,  $f$  を "よい" 函数とすれば Eisenstein 級数

$$(4.1) \quad E(g^*; \varphi) = \sum_{x^* \in P_{\mathbb{Q}}^* \backslash G_{\mathbb{Q}}^*} \varphi(x^* g^*)$$

は絶対収束し,  $G_{\mathbb{Q}}^* \backslash G_A^*$  上 slowly increasing な函数

を定める。  $\mathcal{C} \in \mathbb{G}_A$  上の  $\mathbb{C}$ -valued smooth function として

$$(4.2) \quad f(\underline{x} \underline{g}(\underline{z})) = \psi_s(\underline{z}) f(\underline{g}) \quad \underline{x} \in \mathbb{G}_{\mathbb{Q}}, \quad \underline{z} \in \mathbb{Z}_A$$

$$(4.3) \quad f \text{ は } \mathbb{G}_{\mathbb{Q}} \backslash \mathbb{G}_A \text{ 上 rapidly decreasing}$$

$$(4.4) \quad \int_{\underline{N}^d(\mathbb{Q}) \backslash \underline{N}^d_A} f(\underline{u} \underline{g}) d\underline{u} = 0 \quad \underline{g} \in \mathbb{G}_A$$

が任意の  $1 \leq d \leq n$  について成立

をみたすもののなす空間とする。  $\varphi \in \mathcal{C}$  に対し, convolution



$$I(\varphi; f) = \int_{\underline{G}_A \times \underline{G}_A \setminus \underline{G}_A \times \underline{G}_A} E(\iota(\underline{g} \times \underline{g}'); \varphi) \\ f(\underline{g}) \overline{f(\underline{g}')} d\underline{g} d\underline{g}'$$

を考える。定義 (4.1) より

$$I(\varphi; f) = \int_{\underline{G}_A \times \underline{G}_A \setminus \underline{G}_A \times \underline{G}_A} \sum_{\gamma^* \in P_A^* \setminus G_A^* / U(\underline{G} \times \underline{G})_A} \\ \sum_{\xi^* \in \gamma^{*-1} P_A^* \gamma^* \cap U(\underline{G} \times \underline{G})_A \setminus U(\underline{G} \times \underline{G})_A} \varphi(\gamma^* \xi^* \iota(\underline{g} \times \underline{g}')) \\ \times f(\underline{g}) \overline{f(\underline{g}')} d\underline{g} d\underline{g}' .$$

対応  $\gamma^* \mapsto L_0 \gamma^*$  は,  $P_A^* \setminus G_A^* / U(\underline{G} \times \underline{G})_A$  と,  $\sim$  との同値関係を与え, さらには  $\iota(\underline{P}(L_0 \gamma^*)) = \gamma^* P_A^* \gamma^{*-1} \cap U(\underline{G} \times \underline{G})_A$  である。今  $L \in \mathcal{L}$  に対し,  $L = L_0 \gamma_L^*$  なる  $\gamma_L^* \in G_A^*$  を一つ選ぶ。

$$I(\varphi; f) = \sum_{L \in \mathcal{L}/\sim} I_L ,$$

$$I_L = \int_{\underline{P}(L)_A \setminus (\underline{G} \times \underline{G})_A} \varphi(\gamma_L^* \iota(\underline{g} \times \underline{g}')) f(\underline{g}) \overline{f(\underline{g}')} d\underline{g} d\underline{g}' .$$

( $I_L$  は  $L$  の同値類に依存しない)。

$L = L_0$  のとき,  $\underline{P}(L) = \underline{G}^d$  なることは容易,

$$I_{L_0} = \int_{\underline{G}_A} \varphi(L(\underline{g} \times 1)) \Omega(\underline{g}; f) d\underline{g},$$

ただし

$$\Omega(\underline{g}; f) = \int_{\underline{G}_Q \backslash \underline{G}_A} f(\underline{x} \underline{g}^{-1}) \overline{f(\underline{x})} d\underline{x}.$$

$L \sim L_0$  ならば,  $L = L_{U,d}$ ,  $(U,d) \neq (\{0\}, 0)$  としてよい。このとき  $\underline{P}(L)$  は Lemma 2.3 で定めた  $\underline{N}(U,d)$  は normal subgroup として,  $I_L$  の積分は

$$J = \int_{\underline{N}(U,d)_Q \backslash \underline{N}(U,d)_A} f(\underline{n} \underline{g}) \overline{f(\underline{n}' \underline{g}')} d\underline{n}^*$$

( $\underline{n}^* = \underline{n} \times \underline{n}' \in \underline{N}(U,d)_A$ ) を通す,  $U \neq \{0\}$  のときは上の積分  $J$  が更に

$$\int_{\underline{N}_Q^d \backslash \underline{N}_A^d} f(\underline{n} \underline{g}) d\underline{n} = 0$$

を通すことから (4.4) により  $I_L = 0$ .  $U \neq \{0\}$  のときは,  $J$  が

$$\int_{Z(U)_Q \backslash Z(U)_A} \psi_S(z) dz$$

を通し, さらには  $\psi_S$  が  $Z(U)_A$  上 nontrivial であること ( $S > 0$  からの帰結) から  $I_L = 0$  を得る。

まとめると

Proposition 5 (Basic identity)

$$(4.5) \quad I(\varphi; f) = \int_{\underline{G}_A} \varphi(L(\underline{g} \times 1)) \Omega(\underline{g}; f) d\underline{g}$$

最後に, basic identity の Jacobi form の  
L-函数の理論への応用について大ざっぱに述べる。

$G_{S, \ell} \subset \mathcal{C}$  であるから weight  $\ell$ , index  $S$  の  
Jacobi form  $f$  に対して (4.5) を適用できる。

$f \in G_{S, \ell} \ni \otimes_{p \nmid \det(2S)} \mathcal{H}_p$  の同時固有函数とす  
ると §2 の最後に述べたことから  $\Omega(\underline{g}; f)$  は  
帯球函数  $\omega_{\chi_{f, p}}(\underline{g}_p)$  たちの積に分解する。従っ  
て  $\varphi$  を分解型 ( $\varphi(g^*) = \prod_v \varphi_v(g_v^*)$   $g^* = (g_v^*)$   
 $\in G_A^*$ ) にとけば (4.5) の右辺はある Euler 積に分解  
する。  $K^*$  を適当な  $G_A^*$  の compact subgroup とし、  
 $\varphi_S(p^* k^*) = \delta(p^*)^S$  ( $p^* \in P_A^*$ ,  $k^* \in K^*$ ) の  
形にとけば (実際は  $\infty$ -成分を少し変更する必要があ  
る), good prime  $p$  ( $p \nmid \det(2S)$ ) における  
Euler 積の local factor を計算するに役立つ。  
すなわち  $L_p(s, f)$  にはある elementary factor をかけた

ものになる。一方, Eisenstein 級数の理論 (Langlands) により, (4.5) の左辺は,  $S$  の函数として全平面に解析接続され, ある函数等式を持つ。これにより,  $f$  に付随する  $L$ -函数  $L(s, f)$  の解析的性質に関して情報が得られる。この方法によって満足すべき結果が得られるのは, 最初に固定した  $S$  が各素数  $p$  に対し, 次の二条件 (4.6) $_p$ , (4.7) $_p$  をみたすことである:

$$(4.6)_p \quad \mathbb{Q}_p^m \text{ の lattice } L_1 \text{ で } L_1 \supset L = \mathbb{Z}_p^m \\ \text{かつ } "x \in L_1 \Rightarrow S[x] = {}^t x S x \in \mathbb{Z}_p" \text{ ならば } \\ L_1 = L$$

(4.6) $_p$  の下で

$$L' = \{ x \in \mathbb{Q}_p^m \mid x \in (2S)^{-1}L, \text{ 且 } S[x] \in p^{-1}\mathbb{Z}_p \}$$

は  $\mathbb{Q}_p^m$  の lattice で  $L \subset L' \subset p^{-1}L$ 。今,

$$\partial_p(S) = \dim_{\mathbb{F}_p} (L'/L) \quad \text{と} \quad \partial_p(S) \leq 2 \quad \text{が知られる。}$$

$$(4.7)_p \quad \partial_p(S) = 0 \quad (\text{つまり } L' = L)$$

§2 で述べたこと (Satake 同型の存在) はこの場合にまで成立し,  $L(s, f)$  の解析接続, 函数等式等が証明される。(  $\partial_p(S) = 1$  のときは Hecke 環  $\mathcal{H}_p$  は可換であるが Satake 同型は存在しない。  $\partial_p(S) = 2$  のときは一般に  $\mathcal{H}_p$  は可換でない )

$m=1$ ,  $S=(1)$  の場合  $(4.6)_p$ ,  $(4.7)_p$  は  $\forall p$  に  
 対し成立する, この場合  $f \in \mathcal{G}_{S, \ell}$  は vector valued  
 の半整数重  $(\ell - \frac{1}{2})$  の Siegel modular form  
 と同一視される.

最後に付いたが Shintani は [Sh] においてまったく  
 別の興味深い方法で Jacobi form の L-函数の研究  
 を創めている.  $m=1$  のときは 菅野孝史 氏が [Sh]  
 で未解決だった部分も含めて証明を復元している.  
 本稿の §1.2 は [Sh] に多く依っていることを付言し  
 たい.

## Reference

- [PS-R] I. Piatetski-Shapiro & S. Rallis  
 "L-functions of automorphic forms on simple classical groups", in "Modular forms" ed. by R.A. Rankin, Halsted Press, 1984, 251-261.
- [Sa] I. Satake  
 「ある群拡大と  $z=4$  の表現について」  
 数学, 21 (1969) 241-253
- [Sh] T. Shintani unpublished notes